

《原 著》

ECT における種々の逐次型画像再構成法の比較

村山 秀雄* 田中 栄一* 野原 功全* 富谷 武浩*
山本 幹男*

要旨 ECT における 6 つの逐次型画像再構成法をアルゴリズムの比較によって分析すると同時に、計算機によるシミュレーション実験により逐次近似画像を作成してこれらの方法の特性および収束性を分析した。期待値最大化アルゴリズム (EM) 法は加算式同時逐次近似 (ASIRT) 法および最急降下式最小自乗逐次近似 (GRADY) 法にアルゴリズムが類似しており、EM 法は ASIRT 法よりも収束性が良好であった。像空間逐次近似アルゴリズム (ISRA) 法は乗算式同時逐次近似 (MSIRT) 法を簡素化したアルゴリズムであるが収束速度は劣化した。共役傾斜最小自乗逐次近似 (CONGR) 法は高周波成分の補正を増強する効果があるため、上述の 6 つの方法の中では最も収束性が良好であった。また、逐次近似画像の収束性を示すための 4 つの適合関数について相互比較を行い、各適合関数の特色や相互の関連性を分析した。

I. はじめに

ポジトロン ECT (PET) やシングルフォトン ECT (SPECT) などの放射型 CT (ECT) の画像再構成法として、多くは通常の X 線 CT で用いられる重畳積分法¹⁾もしくはフーリエ変換法²⁾などの解析的手法が利用されてきた。しかるに、ECT では投影データが元来負でない整数値であることや、検出器の 3 次元の配列により同時に 3 次元の投影データを収集して感度を向上できる等の特徴がある。近年、このような ECT の特徴を生かす試みとして、新しい逐次型画像再構成法の研究が急速に進められつつある³⁻¹⁴⁾。

Shepp らが提案した期待値最大化アルゴリズム (Expectation Maximization Algorithm, EM) 法³⁾は収束性が数学的に証明されており⁴⁾、逐次近似画像の総和が自動的に測定投影データの総和に等しくなることや、原理的にいずれの画素値も負値にならないことが保証されているなどの利点があ

るため、ECT への実用化が大いに期待されている⁵⁻¹²⁾。しかし、PET 装置の多層化および高解像力化に伴い、逐次型画像再構成の計算に必要な計算機の記憶容量は急激に増加する傾向にある。記憶容量の効率的利用をはかるために、Daube-Witherspoon らは像空間逐次近似アルゴリズム (Image Space Reconstruction Algorithm, ISRA) 法¹³⁾を提案した。この方法は測定投影データの逆投影画像を基準にして、これと推定投影データの逆投影画像との比較から画像の補正を行う点に特徴がある。

一般に CT の画像再構成のために開発された逐次型画像再構成法は 2 つに大別できる。1 つは各投影方向ごとに推定画像から作成した投影データを実測投影データと比べて、画像の補正をそのたびに行う (ray-by-ray) 方式であり、各種の ART 法がその例である¹⁵⁾。ここではこの方式を単一逐次型と名づける。

もう 1 つの方式は、各画素ごとに全投影データに対する実測値との誤差を調べて補正值を求め、全画素の補正を同時に行う (point-by-point) 方式である。このような方式をここでは連立逐次型と名づける。EM 法や ISRA 法はこの連立逐次型に属しており、そのほかにも、加算式同時逐次近似

* 放射線医学総合研究所物理研究部

受付: 62 年 1 月 13 日

最終稿受付: 62 年 1 月 13 日

別刷請求先: 千葉市穴川 4-9-1 (☎ 260)

放射線医学総合研究所物理研究部

村山 秀雄

(Additive Simultaneous Iterative Reconstruction Technique, ASIRT) 法¹⁶⁾ や乗算式同時逐次近似 (Multiplicative Simultaneous Iterative Reconstruction Technique, MSIRT) 法¹⁶⁾, および最急降下式最小自乗逐次近似 (Gradient Method, GRADY) 法¹⁷⁾ や共役傾斜式最小自乗逐次近似 (Conjugate Gradient Method, CONGR) 法^{18,19)} などがある。連立逐次型は単一逐次型の画像再構成法に比べると、雑音を含む投影データに対して収束性の良い安定した逐次近似画像の得られる点に特色があるため、ECT に適している¹⁸⁾。

本論文では、上にあげた6つの連立逐次型画像再構成法について分析する。特に EM 法および ISRA 法と他の方法との相違点や類似点を系統的に比較し、それらの特徴を明らかにする。また、計算機を用いたシミュレーション実験によって、これらの方法の収束性や逐次近似画像の特徴を分析する。さらに逐次近似画像がどれだけ真の画像に近い像であるか、またはどれだけ収束値に近づいたかを示す尺度(ここでは適合関数と名づける)を4つとりあげる。同一のシミュレーション実験に対するこれらの適合関数を求めて収束性の分析を行うと同時に、それらの比較によって各適合関数の特徴や、相互の関連性を示す。

II. 逐次型画像再構成法

1. アルゴリズムの比較

簡単のためにここでは一平面内の画像および投影データの組を考える。Fig. 1 のように対象とする領域は円形内とした。この領域は J 個の画素で構成されているものとし、その各画素に1から J までの通し番号をつける。 j 番目 ($j=1, \dots, J$) の画素における画素値は x_j で表す。

投影データの組に対してはその投影方向に関する区別をせずに、1から I までの通し番号をつける。 i 番目 ($i=1, \dots, I$) の測定投影データは y_i とする。以下の議論においては投影データ y_i が統計雑音を含まないものと仮定する。

j 番目の画素内に分布する線源が i 番目の投影データとして検出される確率を a_{ij} で表す。ただ

し、すべての画素 j に対して a_{ij} が次式を満たすと仮定する。

$$\sum_{j=1}^J a_{ij} = 1 \quad (j=1, \dots, J) \quad (1)$$

すなわち、 a_{ij} は i に関する規格化が行えるものとする。

逐次型画像再構成法を用いて得られた n 回目の逐次近似画像を $x_j^{(n)}$ と表せば、この画像を元にして作成される推定投影データ $z_i^{(n)}$ は次式で与えられる。

$$z_i^{(n)} = \sum_{j=1}^J a_{ij} x_j^{(n)} \quad (i=1, \dots, I) \quad (2)$$

各逐次型画像再構成法のアルゴリズムは、 $(n+1)$ 回目の逐次近似画像 $x_j^{(n+1)}$ を与える式によって表せる。以下に6つの連立逐次型のアルゴリズムを列記する。

1) EM 法³⁾

$$x_j^{(n+1)} = x_j^{(n)} \cdot \left\{ \frac{\sum_{i=1}^I (y_i a_{ij} / z_i^{(n)})}{\sum_{i=1}^I a_{ij}} \right\} \quad (3)$$

2) ISRA 法¹³⁾

$$x_j^{(n+1)} = x_j^{(n)} \cdot \left\{ \left(\frac{\sum_{i=1}^I y_i a_{ij}}{\sum_{i=1}^I z_i^{(n)} a_{ij}} \right) \right\} \quad (4)$$

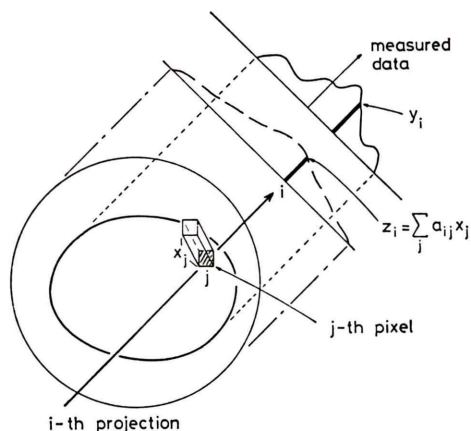


Fig. 1 Scheme of the reconstruction domain and projection data. The j -th pixel has a value of x_j . The i -th projection has a measured value of y_i and an estimated value of z_i . The a_{ij} denotes the probability that an event emitted from pixel j is assigned to projection i .

3) ASIRT 法¹⁶⁾

$$x_j^{(n+1)} = x_j^{(n)} + \sum_{i=1}^I \left\{ (y_i - z_i^{(n)}) a_{ij} / \sum_{j=1}^J a_{ij} \right\} \quad (5)$$

4) MSIRT 法¹⁶⁾

$$x_j^{(n+1)} = x_j^{(n)} \cdot \frac{\left\{ \sum_{i=1}^I (y_i a_{ij} / \sum_{j=1}^J a_{ij}) \right\}}{\left\{ \sum_{i=1}^I (z_i^{(n)} a_{ij} / \sum_{j=1}^J a_{ij}) \right\}} \quad (6)$$

5) GRADY 法^{17,19)}

$$x_j^{(n+1)} = x_j^{(n)} + \beta^{(n)} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^I (y_i - z_i^{(n)}) a_{ij} / \sum_{i=1}^I a_{ij}^2 \right\} \quad (7)$$

ただし, $\beta^{(n)}$ は偏差自乗関数

$$N^2(x_j^{(n+1)}) = \sum_{i=1}^I (y_i - z_i^{(n+1)})^2$$

が極小値をとるように選ばれる。

6) CONGR 法^{18,19)}

$$x_j^{(n+1)} = x_j^{(n)} + \beta^{(n)} \cdot \Delta x_j^{(n)} \\ \Delta x_j^{(n)} = \sum_{i=1}^I (y_i - z_i^{(n)}) a_{ij} / \left(\sum_{i=1}^I a_{ij}^2 \right) - \gamma^{(n)} \Delta x_j^{(n-1)} \quad (8)$$

ただし, $\gamma^{(0)} = 0$. $\gamma^{(n)}$ ($n \neq 0$) は $\Delta x_j^{(n-1)}$ と $\Delta x_j^{(n)}$ が互いに a_{ij} を要素とする行列に関して直交するような共役関係をとるように選ばれ, $\beta^{(n)}$ は GRADY 法と同様に偏差自乗関数 $N^2(x_j^{(n+1)})$ が極小値をとるように選ばれる。以上の 6 つのアルゴリズムのうち, ISRA, ASIRT, および MSIRT 法に関しては各逐次近似ごとに $x_j^{(n+1)}$ が負値の場合はこれを 0 に修正し, かつ $x_j^{(n+1)}$ と y_i の j および i に関するそれぞれの総和を等しくするように規格化をする。これらのアルゴリズムの詳細については引用文献に譲り, 以下ではアルゴリズム相互の相違点や類似点を分析する。

EM 法では (3) 式より初期画像 $x_j^{(0)}$ がいずれの画素でも負値でなければ, つねに $x_j^{(n)}$ は負値にならないことが明らかである。また, (3) 式の両辺を j について加算すると, (2) 式より次式が成立する。

$$\sum_{j=1}^J x_j^{(n+1)} = \sum_{j=1}^J x_j^{(n)} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^I (y_i a_{ij} / z_i^{(n)}) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^I \left\{ y_i \cdot \sum_{j=1}^J (a_{ij} x_j^{(n)} / z_i^{(n)}) \right\} \\ = \sum_{i=1}^I y_i \quad (9)$$

上の式は逐次近似画像の総和が つねに測定投影データの総和に等しいことを保証している。

(3) 式の右辺は (1), (2) 式を用いて次のように変形できる。

$$(3) \text{ 式の右辺} = x_j^{(n)} \cdot \left\{ 1 - \sum_{i=1}^I a_{ij} + \sum_{i=1}^I (y_i a_{ij} / z_i^{(n)}) \right\} \\ = x_j^{(n)} \cdot \left\{ 1 + \sum_{i=1}^I (y_i - z_i^{(n)}) \cdot a_{ij} / z_i^{(n)} \right\} \\ = x_j^{(n)} + \sum_{i=1}^I \left\{ (y_i - z_i^{(n)}) \cdot a_{ij} x_j^{(n)} \right. \\ \left. / \sum_{j=1}^J a_{ij} x_j^{(n)} \right\} \quad (3')$$

(3') 式は (5) 式の右辺と類似の関係にあることが認められる。すなわち, 両者はともに補正項として投影データの推定値誤差 $(y_i - z_i^{(n)})$ を各画素に配分する式である。しかるに, (5) 式はその配分の重みが a_{ij} に比例するだけであるのに対して, (3') 式では a_{ij} のみならず前回の逐次近似値 $x_j^{(n)}$ にも比例する。以上の考察より, 前回の逐次近似画像も補正因子に寄与させる EM 法は ASIRT 法より良好な収束性を期待し得る。

また, (7) 式の左辺も $(y_i - z_i^{(n)})$ の成分を各画素に割り当てる式であり, GRADY 法も EM 法および ASIRT 法に類似している。ただし, (7) 式では平均自乗関数 $N^2(x_j^{(n+1)})$ が極小値をとるように補正項の係数が選ばれる。一方, CONGR 法は GRADY 法の変形である。(8) 式では単に $(y_i - z_i^{(n)})$ に比例する補正項のみではなく, 前回の補正画像成分を考慮してその成分をあらかじめ取り除く。初期の補正が主に低周波成分の補正であることから, CONGR 法では誤差の高周波成分の補正を強調する効果が生じる。したがって, CONGR 法は GRADY 法より良好な収束性を期待し得る。

ISRA 法と MSIRT 法はアルゴリズムの式 (4) と (6) の比較により類似性の高いことが判明する。前者が y_i および $z_i^{(n)}$ の単純逆投影画像の比を補

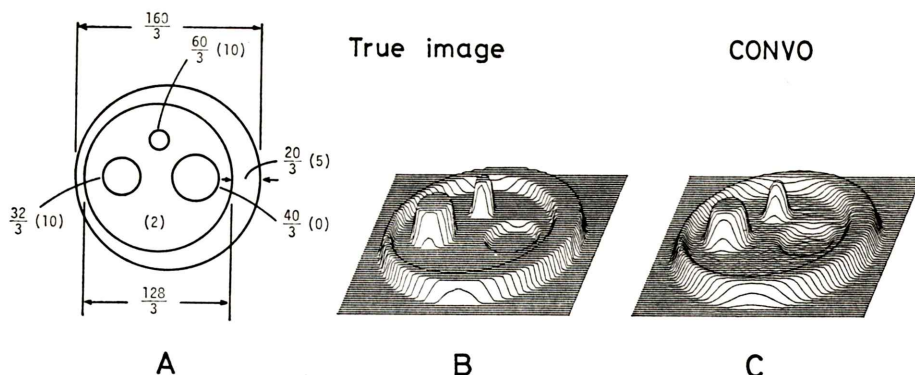


Fig. 2 The mathematical phantom used in the simulation (A) and its image (B). The values without parentheses are diameters or distances in terms of pixel number and the values in parentheses are relative emission densities. CONVO shows the reconstructed image using the convolution method (C).

正因子とするのに対して、後者は各逆投影方向の因子 a_{ij} の和 $\sum_{j=1}^J a_{ij}$ によって規格化した逆投影像で補正因子を形成する。すなわち ISRA 法は MSIRT 法のアルゴリズムを簡素化した画像再構成法である。

2. 逐次近似画像の比較

各種の逐次型画像再構成法によって作成される逐次近似画像を比較するために、計算機によるシミュレーション実験を行った。使用した数学的ファントムを Fig. 2 の A に示す。ファントムの形状は画素の辺の長さを単位とした円の直径等で与えられており、各領域ごとの線源濃度はカッコ内の相対値で示されている。

以下における画像再構成では具体例として高解像力 PET 装置を使用した場合を想定する。この PET 装置は 240 個の検出器が円環状ガントリーに 6 mm 間隔で等間隔配列されているものとし、投影データの標本化は画素の辺の長さ (1.5 mm) に等しい標本間隔で行うものとする。投影方向は 0.75° ごとに等間隔で 240 方向が得られる。以上の想定に基づいて、測定投影データ $y_i (i=1, \dots, I)$ を計算した。

Figure 2 の B は、ファントム A の線源分布画像を鳥かん図で表示したものである。本論文中的鳥かん図表示はすべて $64 \times 64 (=4,096)$ 画素数の

正方形画面上に内接する円形画面上で表示した。

Fig. 2 の C は、通常の重畳積分法によって得られた再構成画像である。その重畳フィルタ関数には Shepp-Logan の関数¹⁾を使用した。

逐次近似画像は逐次近似回数 n に依存するだけでなく、 $n=0$ で与えられる初期推定画像にも依存する。以下の逐次近似画像で使われた初期画像はすべて同一であり、その画素値 $x_j^{(0)}$ は次式で与えた。

$$x_j^{(0)} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^I y_i \quad (\text{for all } j) \quad (10)$$

すなわち、初期画像は全画面上で一定の画素値をとり、その総和が測定投影データの総和に等しい。

Figure 3 の A1, A2 および A3 は、EM 法によって作成された画像であり、それぞれ逐次近似回数が $n=4, 20$ および 100 の逐次近似画像である。同様に、B1, B2, B3 は ASIRT 法、C1, C2, C3 は GRADY 法による $n=4, 20$ および 100 の逐次近似画像である。Fig. 4 には ISRA 法 (D1, D2, D3), MSIRT 法 (E1, E2, E3) および CONGR 法 (F1, F2, F3) による逐次近似画像を例示した。これらの画像の逐次近似回数も同様にして、上から順に $n=4, 20$ および 100 である。

Figures 3 および 4 の上段の画像を見ると、 $n=4$ の逐次近似画像は CONGR 法の場合 (F1) を除いてほとんど真の画像 (Fig. 2 の B) を復元できな

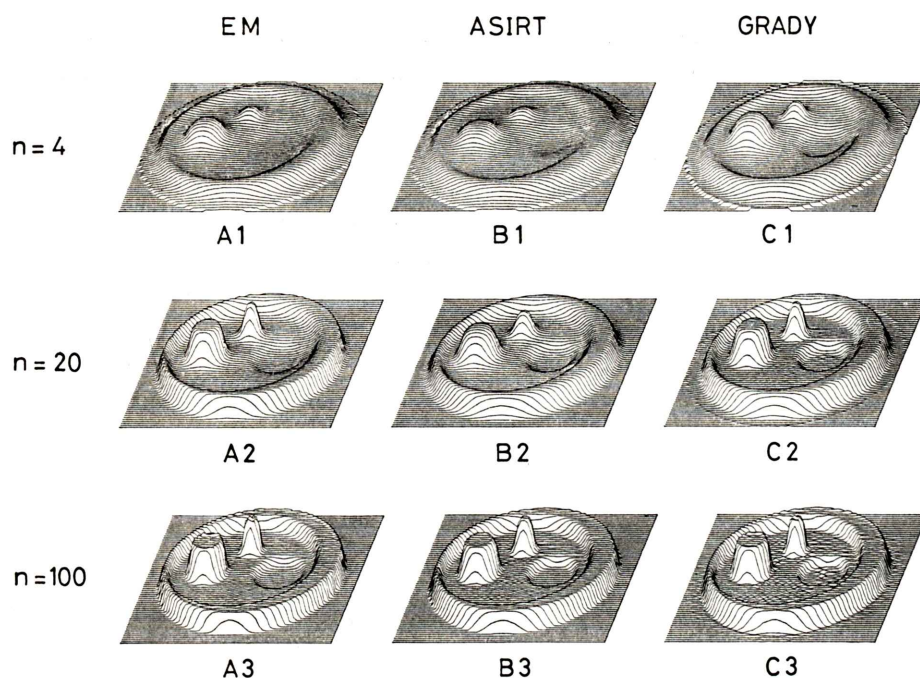


Fig. 3 Reconstructed images using EM method (A1, A2, A3), ASIRT method (B1, B2, B3), and GRADY method (C1, C2, C3). The top, middle, and bottom images have iteration numbers of $n=4$, 20, and 100, respectively.

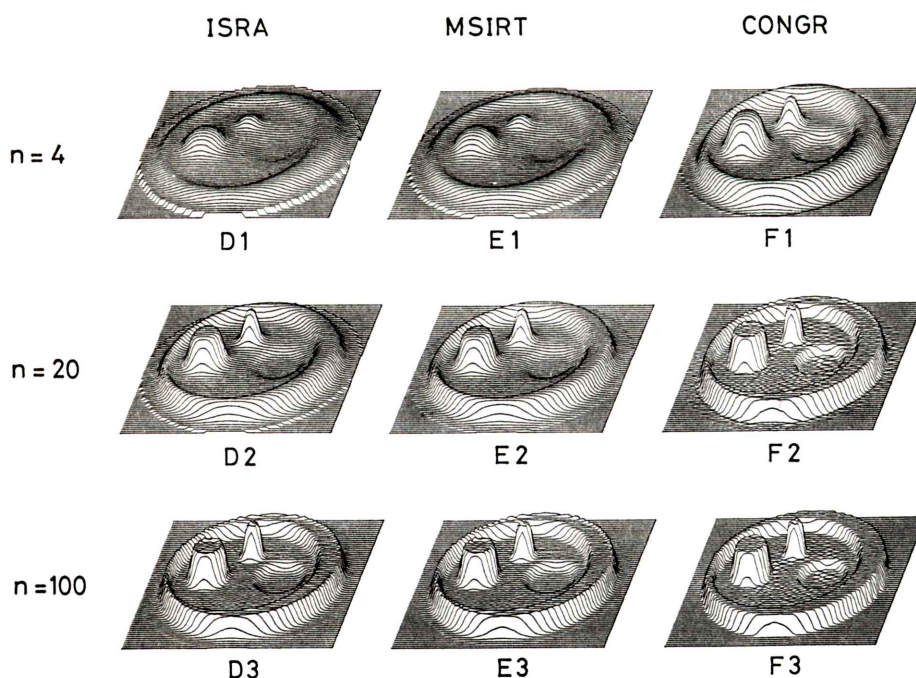


Fig. 4 Reconstructed images using ISRA method (D1, D2, D3), MSIRT method (E1, E2, E3), and CONGR method (F1, F2, F3). The top, middle, and bottom images have iteration numbers of $n=4$, 20, and 100, respectively.

った。しかも、重畳積分法で作成した再構成画像 (Fig. 2 の C) に比べれば画像 F1 の復元度はまだ十分でなかった。

Figures 3 および 4 の中段の画像を見ると、どの再構成法でも復元性が向上しており、特に、CONGR 法 (F2) と GRADY 法 (B2) はホットおよびコールド領域で Fig. 2 の C に近い画像に復元されている。類似のアルゴリズムと考えられる EM, ASIRT, GRADY 法の中では A2, B2, C2 の画像の比較より、最も収束速度が良好であるのは GRADY 法であり、次に EM, ASIRT 法の順であるとみなすことができた。また、EM 法と ASIRT 法の共通する特徴として、画像の周辺において速くしかも安定に画素値が 0 の値へ収束することが認められた。画像 D2 と E2 はともに画像周辺部で 0 の値へ戻るのが遅く、特に D2 の方でその傾向が著しい。したがって、ISRA 法は MSIRT 法より収束速度が遅いと考えられた。

Figures 3 および 4 の下段の画像はいずれも Fig. 2 の C と同程度の画像に復元しており、逐次近似回数を 100 回以上に選ぶ必要はないと判断した。

III. 逐次近似回数の選択

いずれの画像再構成法を用いても、作成された画像 x_j が真の画像 T_j に正確に復元することは難しい。種々の画像再構成法の良否を判定するには、それぞれに作成された画像が真の画像にどれだけ近い像であるかを示す客観的な尺度 (適合関数) が必要となる。特に、逐次型画像再構成法ではアルゴリズムの繰り返しによって各逐次近似ごとに作成画像が更新される。したがって、適当な再構成画像を選択することが不可欠となり、その選択の妥当性を評価するために何らかの適合関数を導入し、収束度を定量的に分析する必要がある。

最も信頼し得る適合関数は作成画像 x_j と真の画像 T_j の相対誤差のみで表されたもの (直接型適合関数と名づける) である。しかるに、実際の ECT 画像再構成においては真の画像 T_j が未知のため直接型適合関数の利用は不可能となる。その

代わりに実測投影データ y_i と推定投影データ z_i の相対誤差で表された関数 (間接型適合関数と名づける) を用いる。ここに (2) 式と同様に

$$z_i = \sum_{j=1}^J a_{ij} x_j$$

以下に代表的な直接型適合関数 1 つと間接型適合関数 3 つを列記する。

- 1) 平均誤差関数: $m(x_j)$

$$m(x_j) = \left(\sum_{j=1}^J |x_j - T_j| \right) / \left(\sum_{j=1}^J T_j \right) \quad (11)$$

- 2) 偏差自乗関数: $N^2(x_j)$

$$N^2(x_j) = \sum_{i=1}^I (y_i - z_i)^2 \quad (12)$$

- 3) 対数尤度関数: $l(x_j)$

$$l(x_j) = \sum_{i=1}^I (y_i \log z_i - z_i) \quad (13)$$

- 4) 平均補正因子誤差関数: $R(x_j)$

$$R(x_j) = \left\{ \sum_{j=1}^J (E_j - 1)^2 / L \right\}^{1/2} \quad (14)$$

ここに

$$E_j = \sum_{i=1}^I (y_i a_{ij} / z_i) \quad (15)$$

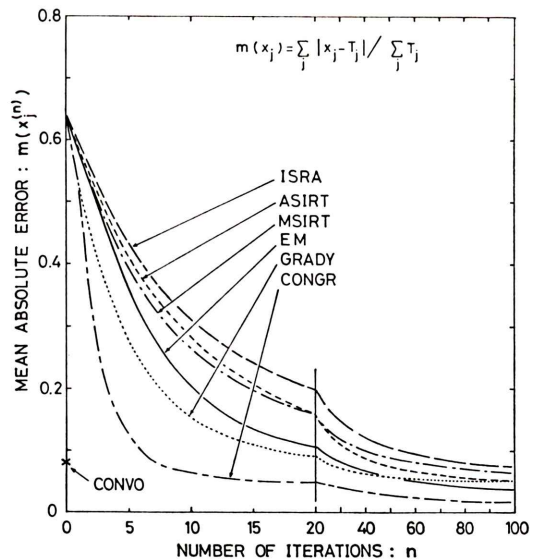


Fig. 5 Plots of the mean absolute error $m(x_j^{(n)})$ as a function of the iteration number n . The mean absolute error of the reconstructed image using the convolution method is marked by x.

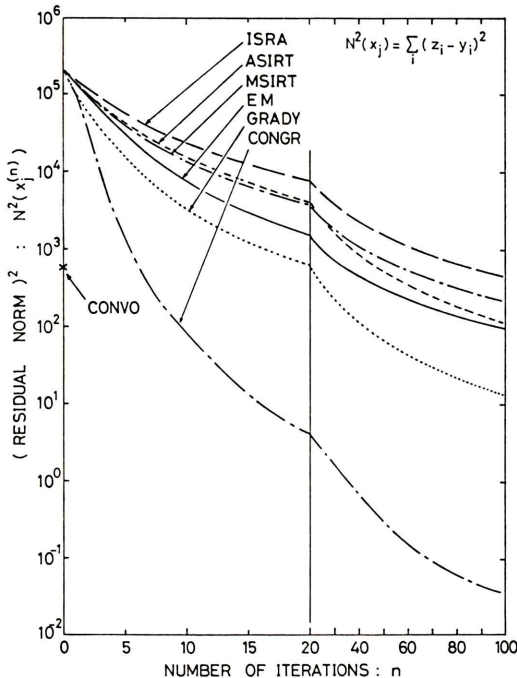


Fig. 6 Plots of the square norm of the residual, $N^2(x_j^{(n)})$ as a function of the iteration number n . The $N^2(x_j^{(n)})$ value of the reconstructed image using convolution method is marked by x.

(15) 式は (3) 式の右辺における中カッコ内の式と同一である。また、(14) 式の j に関する和は真の画像 T_j が 0 でない画素 (総数 L) のみに限定する。

6つの逐次型画像再構成法のそれぞれの逐次近似画像に対する適合関数は逐次近似回数 n の関数として表すことができる。前節と同じ数学的ファントム (Fig. 2 の A) および初期画像 ((10) 式) に基づいて計算機によるシミュレーション実験を行い、それぞれの逐次近似画像 $x_j^{(n)}$ ごとに 4つの適合関数 $m(x_j^{(n)})$, $N^2(x_j^{(n)})$, $l(x_j^{(n)})$, $R(x_j^{(n)})$ を求めた。

Figure 5 は $m(x_j^{(n)})$ を n の関数として表したグラフである。グラフを見やすくするために適合関数 $m(x_j^{(n)})$ は各画像再構成法の逐次近似画像ごとに線で結び、 $n=0$ から 100 までを図に表示した。同様に $N^2(x_j^{(n)})$, $l(x_j^{(n)})$ および $R(x_j^{(n)})$ を n の関数として各画像再構成法ごとにグラフで表し

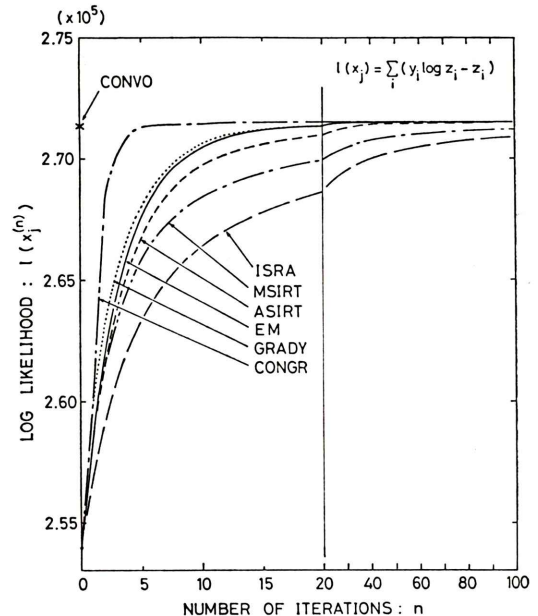


Fig. 7 Plots of the log-likelihood $l(x_j^{(n)})$ as a function of the iteration number n . The log-likelihood of the reconstructed image using the convolution method is marked by x.

たのが、それぞれ Figs. 6, 7 および 8 である。

$m(x_j)$, $N^2(x_j)$ および $R(x_j)$ は x_j が真の画像 T_j に近づくに従い減少し、0 に漸近するが、 $l(x_j)$ は逆に増加し、一定の上限値に近づく。比較のために、重畳積分法の再構成画像 (Fig. 2 の C) に対する適合関数を Figs. 5-8 の縦軸 ($n=0$) 上に $\times$ 印で示した。

同一の逐次近似回数の画像の中では Figs. 5-8 のいずれの適合関数で見ても CONGR 法がっねに最良の収束性を示し、反対に、ISRA 法は最も遅い収束性を示した。また、EM 法と GRADY 法は両者とも ASIRT 法および MSIRT 法に比べてっねに収束性が良好であった。

EM 法と GRADY 法を互いに比較する場合、 $N^2(x_j^{(n)})$ および $l(x_j^{(n)})$ (Figs. 6 と 7) のグラフで見る限り、GRADY 法の方がっねに収束性は良好であった。しかし、 $m(x_j^{(n)})$ または $R(x_j^{(n)})$ (Figs. 5 と 8) のグラフで見ると、GRADY 法が EM 法より収束性が良いのは初期の逐次近似回数

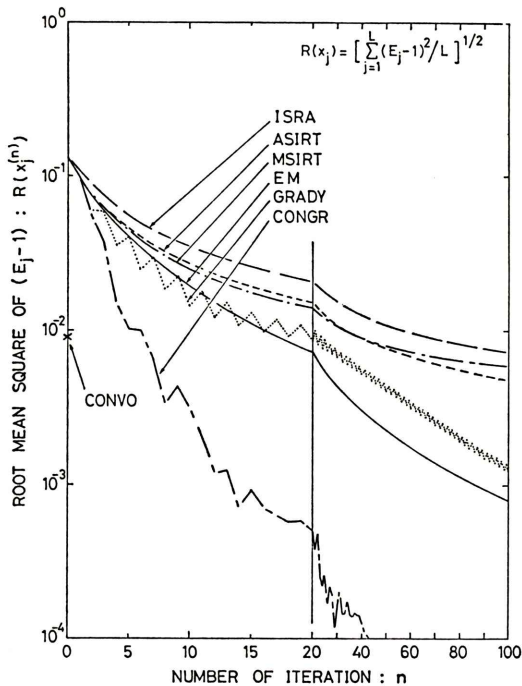


Fig. 8 Plots of the root mean square of (E_j-1) , $R(x_j^{(n)})$ as a function of the iteration number n . The $R(x_j^{(n)})$ value of the reconstructed image using the convolution method is marked by x.

に対してのみであり、 n が一定値より大きくなると逆に EM 法の方が良い収束性を示すようになった。

ASIRT 法と MSIRT 法を互いに比較すると、 $l(x_j^{(n)})$ で見る限り前者の方がつねに良好な収束性を示した。しかし、 $m(x_j^{(n)})$, $N^2(x_j^{(n)})$, $R(x_j^{(n)})$ のいずれのグラフで見ても、ASIRT 法が MSIRT 法より収束性に優るのは $n=20$ 程度までであり、 $n=40$ 以上では MSIRT 法の方が収束性は良好になった。以上のように画像再構成法の収束性を定量的に比較する場合は、使用する適合関数によって、その収束度の判定結果が依存することに注意する必要がある。

重量積分法の再構成画像よりも良好な適合関数を与える逐次近似回数 n の中で最小の n の値を CONVO 等価逐次近似回数と名づける。 $m(x_j)$, $N^2(x_j)$, $l(x_j)$, $R(x_j)$ のそれぞれの CONVO 等価逐

Table 1 Comparison of the iteration numbers for various iterative reconstruction methods with which the values of $m(x_j)$, $N^2(x_j)$, $l(x_j)$ and $R(x_j)$ are equivalent to the corresponding values of the reconstructed image with the convolution method, respectively

Method	Iteration number equivalent to CONVO			
	$n(m)$	$n(N^2)$	$n(l)$	$n(R)$
CONGR	8	7	6	7
GRADY	25	21	20	20
EM	31	35	19	18
ASIRT	46	48	35	39
MSIRT	62	57	>100	39
ISRA	82	86	>100	66

次近似回数をそれぞれ $n(m)$, $n(N^2)$, $n(l)$, $n(R)$ で表し、これらの値を各画像再構成法ごとに求めて表としたものを Table 1 に示した。

$n(m)$ の値の小さい方が良い収束性をもつとみなせば、画像再構成法の収束性は CONGR, GRADY, EM, ASIRT, MSIRT, ISRA 法の順に優劣の序列が得られる。他の 3 つの CONVO 等価逐次近似回数 $n(N^2)$, $n(l)$, $n(R)$ の中で、すべての画像再構成法に対して $n(m)$ と近い値を与えるのは $n(N^2)$ であった。

$n(l)$ は ISRA 法と MSIRT 法に対して $n(m)$ より大幅に大きな値を示す傾向があった。これは、ISRA 法や MSIRT 法のように直流成分の補正が不十分な逐次近似画像に対して、対数尤度関数 $l(x_j)$ が容易にその上限値へ近づけないためである。また、 $n(R)$ の値が各画像再構成法の対応する $n(m)$ の値と大きく異なるのは平均補正因子誤差関数 $R(x_j)$ の評価が画像の全領域ではなく、真の画素値 T_j が 0 でない領域内のみで行われることと、 $R(x_j)$ の値が 0 に近い画素値の変動に大きく影響されることによるものと思われる。

IV. 考察と結論

本論文では ECT における連立逐次型画像再構成法を 6 つ取り上げて、これらのアルゴリズムを分析し、各画像再構成法の特徴を示すと同時に、相互の類似性および相違点を示した。EM 法は

ASIRT 法および GRADY 法にアルゴリズムが類似していることを示すと同時に、補正項の因子を比較して EM 法が ASIRT 法よりは収束性の良いことを推定できた。また、ISRA 法は MSIRT 法のアルゴリズムを簡素化した方法であり、CONGR 法は誤差の高周波成分を強調する効果がアルゴリズムに含まれていることを示した。

計算機によるシミュレーション実験により、同一の数学的ファントムおよび初期画像を用いて逐次近似画像を作成した。これらの画像を鳥かん図表示で比較することにより、画像再構成法の収束性の比較を行い、アルゴリズムの分析による結果の正しいことを裏づけた。特に EM 法と ASIRT 法は画像周辺において 0 の値に速く安定に収束することがわかり、反対に ISRA 法と MSIRT 法は直流成分の収束性の遅いことが判明した。

逐次近似画像の収束性を定量的に分析するために $m(x_j)$, $N^2(x_j)$, $l(x_j)$ および $R(x_j)$ の 4 つの適合関数を導入した。前述と同じシミュレーション実験の結果を用いて、逐次近似回数 n に関する適合関数のグラフを各画像再構成法ごとに求め、それらの比較を行うことによって収束性の定量的分析を行った。 $m(x_j)$ と $N^2(x_j)$ は類似の性質を示す適合関数であり、これらに基づく収束性の比較では CONGR, GRADY, EM, ASIRT, MSIRT, ISRA 法の順で収束性の良いことが判明した。しかるに、 $l(x_j)$ や $R(x_j)$ では別の序列が得られ、4 つの適合関数がそれぞれに特徴をもつことを示した。

近年、計算機技術の進歩により、高速の演算装置が安価に入手できるようになってきた¹⁴⁾。パイプライン処理を行う並列計算機やスーパーコンピュータがさらに普及すれば、今まで画像の作成に長時間を要するために利用されることの少なかった逐次型画像再構成法も臨床において使用できるようになるであろう。したがって ECT に適した逐次型画像再構成法の特性を研究して、実用化をはかる努力が今後は重要となるであろう。

本論文では各画像再構成法の特徴を分析するためにいくつかの仮定を設けて考察対象を簡素化した。第 1 に逐次近似の初期画像は全画面上で同

一画素値をもつと仮定したが、実用的には重畳積分法の再構成画像を初期画像にするなどの方法が考えられ、収束性の向上がはかれるであろう¹¹⁾。

第 2 に測定投影データ y_i が統計雑音を含まないことを仮定したが、実際の ECT においては統計雑音の存在を無視できないので、この影響を考慮した収束性等の分析が今後必要であると考えられる。第 3 に、ファントムの形状は Fig. 2 の A のみを考えたが、ファントムの形状の違いにより各画像再構成法の特性が異なる場合もあり得るので、種種の形状のファントムによる実験も試みる必要がある。

最後に、本論文では一平面内に投影データを限定し、しかも不完全投影データの組ではないと仮定した。しかるに、逐次型画像再構成法が解析的方法に比べて有利となるのは、不完全投影データの条件下や 3 次元投影データによる 3 次元画像再構成の分野であり²⁰⁾、このような場合は重畳積分法のような解析的方法は適用が難しくなる。特に、3 次元画像再構成においては計算機技術の進歩に依存するのみでなく、より収束性の良いアルゴリズムの開発が要求される。

稿を終えるにあたり、有益な助言を頂いた筑波大学臨床医学系外山比南子博士に深謝致します。また、計算機の使用に際してご協力頂いた放射線医学総合研究所技術部福久健二郎データ処理室長に感謝致します。本研究の一部は厚生省がん助成金(松沢班 60-28)および文部省科学研究費(がん特別研究(I)鳥塚班)によって行われた。

文 献

- 1) Shepp LA, Logan BF: Fourier reconstruction of a head section. IEEE Trans Nucl Sci NS-21: 21-43, 1974
- 2) Mersereau RM: Direct Fourier transform techniques in 3-D image reconstruction. Comput Biol Med 6: 247-258, 1976
- 3) Shepp LA, Vardi Y: Maximum likelihood reconstruction for emission tomography. IEEE Trans Med Imag MI-1: 113-122, 1982
- 4) Vardi Y, Shepp LA, Kaufman L: A statistical model for positron emission tomography. J Amer Statist Assoc 80: 8-37, 1985

- 5) Lange K, Carson R: EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography. *J Comput Assist Tomogr* **8**: 306–316, 1984
- 6) Shepp LA, Vardi Y, Ra JB, et al: Maximum likelihood PET with real data. *IEEE Trans Nucl Sci NS-31*: 910–913, 1984
- 7) Snyder DL, Polite DG: Image reconstruction from list-mode data in an emission tomography system having time-of-flight measurements. *IEEE Trans Nucl Sci NS-30*: 910–913, 1984
- 8) Snyder DL, Miller MI: The use of sieves to stabilize images produced with the EM algorithm for emission tomography. *IEEE Trans Nucl Sci NS-32*: 3864–3872, 1985
- 9) Vishampayan S, Stamos J, Mayans R, et al: Maximum likelihood image reconstruction for SPECT. *J Nucl Med* **26**: p 20, 1985
- 10) Miller MI, Snyder DL, Miller TR: Maximum-likelihood reconstruction for single-photon emission computed-tomography. *IEEE Trans Nucl Sci NS-32*: 769–778, 1985
- 11) Tanaka E, Nohara N, Tomitani T, et al: Utilization of non-negativity constraints in reconstruction of emission tomograms. In: *Information processing medical imaging*, ed. Bacharach SL, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986, pp. 379–393
- 12) Lewitt RM, Muehllehner: An iterative reconstruction for positron emission tomography based on the EM algorithm for maximum likelihood estimation. *IEEE Trans Med Imag MI-5*: 16–22, 1986
- 13) Daube-Witherspoon ME, Muehllehner: An iterative image space reconstruction algorithm suitable for volume ECT. *IEEE Trans Med Imag MI-5*: 61–66, 1986
- 14) Floyed CE, Jaszczak RJ, Greer KL, et al: Inverse Monte Carlo as a unified reconstruction algorithm for ECT. *J Nucl Med* **27**: 1577–1585, 1986
- 15) Herman GT, Lent A: Iterative reconstruction algorithms. *Comput Biol Med* **6**: 273–294, 1976
- 16) Gilbert P: Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projections. *J theor Biol* **36**: 105–117, 1972
- 17) Goitein M: Three-dimensional density reconstruction from a series of two-dimensional projections. *Nucl Instr Meth* **101**: 509–518, 1972
- 18) Budinger TF, Gullberg GT, Huesman RH: *Image reconstruction from projection; Implementation and applications*, ed. Herman GT, Springer-Verlag, New York, 1979, pp. 147–246
- 19) Huesman RH, Gullberg GT, Greenberg WL, et al: *RECLBL library user's manual; Donner algorithms for reconstruction tomography*. Publication PUB-214, Lawrence Berkeley Laboratory, 1977
- 20) Tanaka E: Recent progress on single photon and positron emission tomography; from detectors to algorithms. *IEEE Trans Nucl Sci NS-34*: 313–320, 1987

Summary

A Comparison of Several Iterative Reconstruction Methods for ECT

Hideo MURAYAMA, Eiichi TANAKA, Norimasa NOHARA,
Takehiro TOMITANI and Mikio YAMAMOTO

Division of Physics, National Institute of Radiological Sciences, Chiba

Six iterative reconstruction methods appropriate for emission computed tomography were compared in regard to their algorithms. It was shown that the Expectation Maximization algorithm (EM) method is classified in an algorithmic type similar to the Additive Simultaneous Iterative Reconstruction Technique (ASIRT) method and the Gradient (GRADY) method, and that the Image Space Reconstruction Algorithm (ISRA) method has a simplified algorithm of the Multiplicative Simultaneous Iterative Reconstruction Technique (MSIRT) method.

The performances of the six methods were investigated by computer simulation generating their iterative reconstruction images of a mathematical phantom. Four fitness functions were introduced to analyze the convergence of the iterative reconstruction methods quantitatively. Each fitness func-

tion is a measure of the difference between the reconstruction image and the mathematical phantom, or a measure of the rate of convergence. The EM method achieved faster convergence than the ASIRT method, while the ISRA method gave slower convergence than the MSIRT method. Of the six methods, the fastest convergence was obtained using the Conjugate Gradient (CONGR) method, and the slowest was the ISRA method.

The characteristics of each fitness function were also analyzed by its behavior as a function of iteration number for the first 100 iterations of the six methods. These results suggest that the selection of the fitness function for a measure of the convergence is important to use any iterative reconstruction methods.

Key words: ECT, Image reconstruction, Iterative method, EM algorithm, Computer simulation.